ソリトン方程式研究のための数式処理
― 保存量，symmetryの計算 ―

広大・工　伊　藤　雅　明

与えられた方程式の解がソリトン的な振舞いをするかを知るためには，直接解を求めなくとも，ソリトン方程式の持っている性質(無限個の保存量，symmetry, Lax pair等の存在)を，調べればよい。ここでは，日本の多くの大学で利用できる数式処理システムREDUCEによる，発展方程式のLax pair，保存量及びsymmetryを求めるパッケージ[1,~3]を紹介する。

1. Lax pair

ここで紹介するパッケージ[1]はLax pairを求めるときに有効であり，2つの微分演算子L_1，L_2($n\times n$でよい)の交換子$[L_1, L_2]\varphi$を計算するものである。

例として　K-dV方程式

$$u_t = 6uu_x + u_{3x}$$

を考えると，Lax pairは

$$\begin{cases} L_1 = \partial_x^{\,2} + (u-\lambda) \\ L_2 = \partial_t + \partial_x^{\,3} + 3(u+\lambda)\partial_x \end{cases}$$

である。計算機による$[L_1, L_2]\varphi$の実行結果を以下に示す。但し，プログラムCOMMSは既に入力済みであるとする。記号の対応は次に示す通りである。

$$\partial_t^m \partial_x^n \rightarrow H(m, n),\quad u_{mt,nx} \rightarrow (1, m, n)$$

$$\varphi_{mt,xn} \rightarrow P(1, m, n)$$

```
L1(1, 1):=H(0, 2)+(U(1, 0, 0)-R)*H(0, 0)$
L2(1, 1):=H(1, 0) H(0, 3)+3*(U(1, 0, 0)+R)*H(0, 1)$
F:=-(U(1, 0, 0)-R)*P(1, 0, 0)$
IF ARB N>1 AND ARB M LET P(1,M,N)=DF(F,T,M,X,N-2);
```

COMMS(1)$

*** RESULT ARE STORED IN MM(1) - MM(1) ***

MM(1);

P(1, 0, 0)*(−U(1, 1, 0)−U(1, 0, 3)−6*U(1, 0, 1)*U(1, 0, 0))

ここで，下線部は入力を示す。

2. 保存量（保存密度）

発展方程式

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}, \cdots)$$

の保存則は次のように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial t}T(u(t, x)) + \frac{\partial}{\partial x}X(u(t, x)) = 0$$

ここでは F が与えられたとき，多項式の保存密度 T を求めるパッケージ(2)を示す。現在使用できるのは次の3種類である。

① F： u の微分多項式.

② F： 〃 有理式, uniform rank.

③ 2成分系 $\begin{cases} u_t = F_1(u, v) \\ v_t = F_2(u, v) \end{cases}$ （F_1, F_2 は u, v の微分多項式，uniform rank）

例として K−dV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{3x} = 0$$

の始めの5つの保存密度を求めた実行結果を次に示す。

F:=−U(3)−6*U(1)*U(0)$

DRANK(F)$

DU/DT=−U(3)−6*U(1)*U(0)

WEIGHT OF U=2 WEIGHT OF DX=1

```
RANK OF UT=5

FOR I:=2 STEP 2 UNTIL 10 DO CONSD(F,I)$

*** CONSERVED DENSITY OF RANK(2)***
C.D. = U(0)
*** CONSERVED DENSITY OF RANK(4)***
C.D. = U(0)^2
*** CONSERVED DENSITY OF RANK(6)***
C.D. = -U(1)^2 + 2*U(0)^3
*** CONSERVED DENSITY OF RANK(8)***
C.D. = -U(3)*U(1) - 10*U(1)^2*U(0) + 5*U(0)^4
*** CONSERVED DENSITY OF RANK(10)***
C.D. = -U(5)*U(1) - 14*U(3)*U(1)*U(0) - 70*U(1)^2*U(0)^2
        + 14*U(0)^5
```

3. symmetry

$$u_t = F(u,\ u_x,\ \cdots) \qquad (1)$$

に対して，無限小変換 $u \to u + \varepsilon\xi(u)$，（$\varepsilon$ は無限小パラメータ）を施したとき，元の方程式(1)を ε のオーダーで不変に保つとき，$\xi(u)$ を symmetry と呼ぶ。このとき，

$$u_\tau = \xi(u)$$

は(1)式の高次方程式と呼ばれるものである。ここでは F が与えられたとき，symmetry $\xi(u)$ を求めるパッケージ[(3)]を紹介する。現在使用できるのは次の２種類である。

① F： u の微分多項式，uniform rank.

② ２成分系 $\begin{cases} u_t = F_1(u,\ v) \\ v_t = F_2(u,\ v) \end{cases}$ （F_1，F_2 は u，v の微分多項式，uniform rank）

例としてK－dV方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{3x} = 0$$

の始めの４つの symmetry を求めた実行結果を次に示す。

```
F := -U(3) - 6 * U(1) * U(0) $

DRANK(F) $

DU/DT = -U(3) - 6 * U(1) * U(0)
WEIGHT OF U = 2   WEIGHT OF DX = 1
RANK OF UT = 5

FOR I := 3 STEP 2 UNTIL 9 DO SYM F, 1 $

*** SYMMETRY OF RANK(3) ***
DU/DT = U(1)
*** SYMMETRY OF RANK(5) ***
DU/DT = U(3) + 6 * U(1) * U(0)
*** SYMMETRY OF RANK(7) ***
DU/DT = U(5) + 10 * U(3) * U(0) + 20 * U(2) * U(1) + 30 * U(1) * U(0)^2
*** SYMMETRY OF RANK(9) ***
DU/DT = U(7) + 14 * U(5) * U(0) + 42 * U(4) * U(1) + 70 * U(3) * U(2)
        + 70 * U(3) * U(0)^2 + 280 * U(2) * U(1) * U(0) + 70 * U(1)^3
        + 140 * U(1) * U(0)^3
```

文　献

1) M. Ito, Comput. Phys. Commun. **34** (1984) 325.

2) M. Ito and F. Kako, to appear in Comput. Phys. Commun.

3) M. Ito, preprint.